

MATEMÁTICA DISCRETA I

--	--	--	--	--	--

SEGUNDO CONTROL

Apellidos.....Nombre.....nº mat.....

Ejercicio 1 (4 puntos)

Demostrar por inducción que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ejercicio 2 (8 puntos)

Resolver, si es que tiene solución, el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} 5x \equiv 13 \pmod{18} \\ 20x \equiv 4 \pmod{48} \end{cases}$$

Ejercicio 3 (10 puntos)

- ¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra MISSISSIPPI?
- De las palabras anteriores, ¿cuántas no contienen dos o más letras S consecutivas?
- Determinar el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ considerando las siguientes restricciones: $1 < x_1 \leq 3$, $-1 \leq x_2 < 4$, $x_3, x_4 \geq 0$
- ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \\ x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

Ejercicio 4 (8 puntos)

- ¿De cuántas formas distintas puede un estudiante seleccionar las preguntas que desea responder para aprobar un cuestionario con 10 preguntas, donde la primera y segunda preguntas debe responderlas obligatoriamente, y debe responder al menos 7 preguntas para aprobar el examen?
- En una asignatura se califica, con calificaciones enteras, entre 0 y 10. ¿Cuántos alumnos deberán estar matriculados para poder asegurar que hay, al menos, 5 alumnos que tienen la misma nota?
- ¿Cuántas cadenas de longitud n formadas con los símbolos x, y, z, t, se pueden hacer con la condición de que no haya dos símbolos iguales consecutivos?

Ejercicio 5 (10 puntos)

Resolver la siguiente relación de recurrencia, con sus condiciones iniciales:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-2} - 6 \cdot 2^n, & n \geq 2 \\ a_0 = 4 & a_1 = -10 \end{cases}$$

Observaciones:

- TIEMPO: 2 horas
- Justificar todas las respuestas.
- Sólo se valorarán aquellas respuestas que utilicen los métodos desarrollados en esta asignatura.
- No está permitido el uso de calculadoras, ordenadores personales, ni teléfonos móviles.